אלגברה 1 מ' (104016)

בחינת מועד א' חורף תשס"ו – פתרונות מלאים

שם משפחה: _____ שם פרטי: _____

מספר סטודנט: _____ פקולטה: _____

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- בבחינה יש **14** שאלות.
- בחר תשובה נכונה לכל שאלה מבין האפשרויות הנתונות וסמן ב- X את המשבצת המתאימה. אם תסמן יותר ממשבצת אחת לשאלה מסוימת, תשובתך לשאלה זו תפסל.
- לא תורדנה נקודות על תשובות לא נכונות.
- בסוף הבחינה מצורף דף תשובות נוסף המיועד עבורך. תוכל לרשום בו את תשובותיך ולשמור לצורך בדיקת תשובותיך.
- נא לא לפרק השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון פרט לדף האחרון.
- אסור להשתמש בכל חומר עזר כולל מחשבון.

בהצלחה!

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה 1					
שאלה 2					
שאלה 3					
שאלה 4					
שאלה 5					
שאלה 6					
שאלה 7					
שאלה 8					
שאלה 9					
שאלה 10					
שאלה 11					
שאלה 12					
שאלה 13					
שאלה 14					

סה"כ: _____

שאלה מס' 1:

יהי $p(z)=z^6+4z^4+16iz^2+64i$. אחת הטענות הבאות אינה נכונה. סמן אותה.

א) ל- $p(z)$ אין שורשים ממשיים.
ב) אם z_0 הוא שורש של $p(z)$ אז $-z_0$ הוא גם שורש של $p(z)$.
ג) ל- $p(z)$ אין שורשים מדומים טהורים (ז"א מהצורה βi כאשר β ממשי).
ד) קיים שורש z_0 של $p(z)$ כך ש- $\bar{z}_0$ הוא גם שורש של $p(z)$.
ה) סכום שורשי $p(z)$ שווה ל- 0.

פתרון שאלה מספר 1:

מאחר והפולינום איננו ממשי, לא נוכל להשתמש בכל המשפטים הידועים על פולינומים עם מקדמים ממשיים, ולכן יש לגשת לבעיה בדרך אחרת. במקרה זה ניתן בקלות לפרק את הפולינום לגורמים:

$$p(z)=z^6+4z^4+16iz^2+64i=z^4(z^2+4)+16i(z^2+4)=(z^2+4)(z^4+16i)$$

$$p(z)=(z^2+4)(z^4+16i)$$

עתה, קל לבדוק את נכונות הטענות ולמצוא את הטענה שאיננה נכונה:

סעיף א' נכון שכן השורשים מסדר 2 של (-4) והשורשים מסדר 4 של $(-16i)$ אינם ממשיים.
סעיף ב' נכון כי כל החזקות של z הן זוגיות ולכן $z^k=(-z)^k$ לכל k זוגי, לכן אם $p(z_0)=0$ גם $p(-z_0)=0$.
סעיף ג' לא נכון כי השורשים של z^2+4 הם $\pm 2i$ ואלו הם מספרים מדומים טהורים.
סעיף ד' נכון כי z^2+4 הוא פולינום ממשי לכן אם z_0 הוא שורש של z^2+4 אז גם $\overline{z_0}$ הוא שורש (לקביעת נכונות סעיף זה אין צורך למצוא ממש את השורשים).
סעיף ה' נכון כי לפי נוסחת ויאטה מתקיים: $\sum_{j=1}^{n} z_j=\frac{-a_{n-1}}{a_n}$, כאשר z_j הם כל n שורשי הפולינום (לאו דווקא שונים) ו- a_k הוא המקדם של z^k בהתאמה.

במקרה שלנו: $a_5=0$, $a_6=1$, $n=6$ נציב בנוסחת ויאטה ונקבל: $\sum_{j=1}^{n} z_j=\frac{-a_5}{a_6}=\frac{0}{1}=0$.

סימון נכון: ג'.

שאלה מס' 2:

יהיו V, W תת-מרחבים של $M_{2\times2}(\mathrm{R})$.
($M_{2\times2}(\mathrm{R})$ הוא מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2.)

$$V=\left\{\ A\in M_{2\times2}(\mathrm{R}):\quad A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$W=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\right\}.$$

אזי

א) קיימים אינסוף ערכים $a\in\mathrm{R}$ כך ש- $V\cap W=\{0\}$.
ב) קיימים אינסוף ערכים $a\in\mathrm{R}$ כך ש- $\dim(V\cap W)=1$.
ג) קיימים אינסוף ערכים $a\in\mathrm{R}$ כך ש- $\dim(V\cap W)=2$.
ד) קיימים אינסוף ערכים $a\in\mathrm{R}$ כך ש- $\dim V=\dim W$.
ה) $M_{2\times2}(\mathrm{R})=V+W$ לכל $a\in\mathrm{R}$.

פתרון שאלה מספר 2:

בשאלה זו ניתן לבצע חישובים ולמצוא בסיס ומימד למרחבים V , W , $V\cap W$ ולבדוק את הסעיפים השונים. מצד שני, ניתן להגיע למסקנות הנכונות משיקולים אחרים. אני בוחרת לענות על הסעיפים באמצעות שיקולים אחרים (בהנחה שחישובים של בסיס ומימד אפשר לעשות גם באופן עצמאי).

ניתן לראות כי המטריצה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ נמצאת ב- W (כהפרש של שתי מטריצות ב- W) וגם ב- V כי $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, לכן, לכל a מתקיים: $V\cap W\neq\{0\}$. מכאן כי <u>סעיף א'</u> לא נכון, ובהכרח סעיף ב' או ג' יהיה נכון (כי אם $V\cap W\neq\{0\}$ אז בהכרח $\dim(V\cap W)\in\{1,2\}$). אם נניח כי $\dim(V\cap W)=2$ הרי ש- $V\cap W$ הוא תת מרחב של V מאותו מימד כלומר $V\cap W=V$.
אבל $V\cap W$ הוא גם תת מרחב של W לכן נובע: $V\cap W=V\subset W$.
נראה שזה לא יתכן: המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ שייכת ל- V כי $\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. ניראה שהיא לא ב- W לכל a:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z&y+z\\y+z&x+az\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z&y+z\\y+z&x+az\end{pmatrix}$$

מהשוואת רכיבים נקבל $\begin{cases}y+z=-1\\y+z=0\end{cases}$ וזו סתירה. לכן בהכרח $\dim(V\cap W)=1$ לכל a.

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 3:

תהינה A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$, $n \geq 2$ כך ש- $BAB = 0$. אז בהכרח מתקיים:

א) $ABA = 0$.
ב) למערכת $Bx = 0$ יש פתרון לא טריביאלי.
ג) אם A הפיכה, אז $AB = 0$.
ד) אם A הפיכה, אז $rank\, B \leq \frac{n}{2}$.
ה) אם $B = A^k$ עבור איזשהו k טבעי, אז $A = 0$.

פתרון שאלה מספר 3:

סעיף א' לא נכון. כדי למצוא דוגמא נגדית, נבחר $A = I$ ונחפש מטריצה $B \neq 0$ כך ש- $B^2 = 0$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז מתקיים: $BAB = BIB = B^2 = 0$ (כפי שנתון) אבל $ABA = IBI = B \neq 0$.

סעיף ב' לא נכון, למשל נבחר: $A = 0$, $B = I$, אז $BAB = I0I = 0$ אבל B הפיכה לכן למערכת $Bx = 0$ רק הפתרון הטריוויאלי.

סעיף ג' לא נכון. אותה דוגמא כמו בסעיף א', אז $A = I$ הפיכה אבל: $AB = IB = B \neq 0$.

סעיף ה' לא נכון. אם $B = A^k$ אז $BAB = A^k AA^k = A^{2k+1} = 0$. נבחר את A להיות המטריצה B מסעיף א', כלומר $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $BAB = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k \cdot A = (0)^k \cdot A = 0$ אבל $A \neq 0$.

סעיף ד' נכון. נוכיח אותו. בהוכחה נעזר בשלושה משפטים:

1. אם A מטריצה מסדר $n\times n$ והפיכה אז $\text{rank}(A) = n$.
2. לכל שתי מטריצות A ו- B מסדר $n\times n$ כך ש- $AB = 0$ מתקיים: $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.
3. לכל שתי מטריצות A ו- B כך שהמכפלה AB מוגדרת מתקיים:
$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A)\ ,\ \text{rank}(B)\}$.

נתון כי $BAB = (BA)B = 0$ לכן, לפי משפט 2 מתקיים: $\text{rank}(BA) + \text{rank}(B) \leq n$. אבל לפי משפט 3 מתקיים:

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A)\ ,\ \text{rank}(B)\}$$

לפי משפט 1, $\text{rank}(A) = n$ ולכן:

$$\min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} = \min\{n, \text{rank}(B)\} = \text{rank}(B)$$

נציב בשוויון הקודם ונקבל:

$$\text{rank}(BA) + \text{rank}(B) \le n$$

$$\text{rank}(BA) + \text{rank}(B) \le \text{rank}(B) + \text{rank}(B) \le n$$

$$2\cdot\text{rank}(B) \le n$$

$$\text{rank}(B) \le \frac{n}{2}$$

סימון נכון: ד'.

<u>שאלה מס' 4:</u>

יהיו V מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 ותהי $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

נגדיר $T: V \to V$ ע"י $T(A) = MA$. אזי

א) $V = \ker T + \text{Im}\, T$ אך הסכום איננו ישר.
ב) $V = \ker T \oplus \text{Im}\, T$.
ג) T היא חד- חד ערכית.
ד) $\dim(\ker T) > 2$.
ה) $\ker T = \text{Im}\, T$.

<u>פתרון שאלה מספר 4:</u>

<u>סעיף א'</u> לא נכון שכן מצב זה לא יתכן, כלומר אם T הוא אופרטור ליניארי כך ש- $V = \text{Im}T + KerT$ אז בהכרח הסכום הוא סכום ישר, שכן אם $V = \text{Im}T + KerT$ אז:

$$\dim V = \dim\left(\text{Im}T + KerT\right) = \underbrace{\dim \text{Im}T + \dim KerT}_{=\dim V} - \dim(\text{Im}T \cap KerT)$$

$$\dim V = \dim V - \dim(\text{Im}T \cap KerT) \quad \Rightarrow \quad \dim(\text{Im}T \cap KerT) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \text{Im}T \oplus KerT$$

<u>סעיף ב'</u> נכון.
מאחר ו- $\text{Im}T + \ker T$ הוא תת מרחב של V, כדי לקבוע אם $V = \text{Im}T \oplus \ker T$ עלינו לבדוק שני דברים:

1. $\dim\left(\text{Im}T + \ker T\right) = \dim V = 4$ (כדי שאכן תת המרחב $\text{Im}T + \ker T$ שווה למרחב כולו)
2. $\text{Im}T \cap \ker T = \{0\}$ (כדי להבטיח שהסכום שקיים לפי סעיף 1 הוא סכום ישר)

נמצא בסיס ומימד לתמונה:

$$T(A)=MA$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix}=$$

$$(a-c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+(b-d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}T=sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו כי התמונה נפרשת ע"י שתי מטריצות בלתי תלויות ליניארית לכן הן מהוות בסיס לתמונה ובנוסף: $\dim\operatorname{Im}T=2$.

לפי משפט מתקיים: $\dim\operatorname{Ker}T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=4-2=2$.

נמצא את מימד $\operatorname{Im}T\cap\ker T$: ניקח מטריצה כללית ב- $\operatorname{Im}T$, ונבדוק מתי היא נמצאת ב- $\ker T$:

$$A\in\operatorname{Im}T \quad\Leftrightarrow\quad A=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$$

$$A\in\ker T \quad\Leftrightarrow\quad T(A)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -6a & -6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad a=b=0 \;\Rightarrow\; A\in\operatorname{Im}T\cap\ker T \;\Leftrightarrow\; A=0$$

קיבלנו כי $\operatorname{Im}T\cap\ker T=\{0\}$.

נותר להראות כי: $\dim\left(\operatorname{Im}T+\ker T\right)=\dim V=4$:

$$\dim\left(\operatorname{Im}T+\ker T\right)=\underbrace{\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T}_{=\dim V}-\dim\left(\operatorname{Im}T\cap\ker T\right)=\dim V-0=4$$

לכן $V=\operatorname{Im}T\oplus\ker T$.

מהחישובים שביצענו ברור כי T לא חח"ע כי $\ker T\neq\{0\}$ לכן <u>סעיף ג'</u> לא נכון. כן, מצאנו גם כי $\dim\ker T=2$ ולא גדול מ- 2 לכן <u>סעיף ד'</u> לא נכון, ועוד מצאנו כי $\operatorname{Im}T\cap\ker T=\{0\}$ לכן לא יתכן כי $\operatorname{Im}T=\ker T$ כלומר גם <u>סעיף ה'</u> לא נכון.

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 5:

תהי $T: R_2[x] \to R_2[x]$ העתקה ליניארית.

יהי $B=\{p_1=1,\quad p_2=1+x,\quad p_3=1+x+x^2\}$ בסיס ל- $R_2[x]$

כך שהמטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B היא $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

אז $T(1+2x+2x^2)$ שווה ל-

א) $-6-16x-22x^2$
ב) $2+6x+5x^2$
ג) $4+x+11x^2$
ד) $3-10x+11x^2$
ה) $12-3x+23x^2$

פתרון שאלה מספר 5:

זו שאלה טכנית בלבד, ועלינו רק לבצע חישוב למציאת $T(1+2x+2x^2)$. נעזר במשפט:

$$[T]_B[v]_B=[T(v)]_B$$

נחשב את $[v]_B$ כאשר $v=1+2x+2x^2$:

$$v=1+2x+2x^2=\alpha(1)+\beta(1+x)+\gamma(1+x+x^2)$$

$$\begin{cases} 1=\alpha+\beta+\gamma \\ 2=\beta+\gamma \\ 2=\gamma \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=0 \\ \gamma=2 \end{cases}$$

$$[v]_B=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לפי המשפט ונקבל:

$$[T]_B[v]_B=[T(v)]_B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}=[T(v)]_B$$

$$T(v)=T(1+2x+2x^2)=3p_1-10p_2+11p_3=3(1)-10(1+x)+11(1+x+x^2)=4+x+11x^2$$

$$T(1+2x+2x^2)=4+x+11x^2$$

סימון נכון: ג'.

שאלה מס' 6:

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מאותו סדר. **אזי**

א) $rank(AB) = rank(BA)$
ב) אם λ הוא ערך עצמי של AB אז λ הוא ערך עצמי של BA.
ג) אם v הוא וקטור עצמי של AB אז v הוא וקטור עצמי של BA.
ד) אם ל- A ו- B יש אותו פולינום אופייני אז A ו- B דומות.
ה) אם A ו- B דומות אז ל- A ו- B יש אותם וקטורים עצמיים.

פתרון שאלה מספר 6:

סעיף א' לא נכון. דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ \ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ rank(AB)=0$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ rank(BA)=1$$

סעיף ב' נכון שכן כידוע, ל- AB ול- BA יש אותו פולינום אופייני ולכן גם אותם ערכים עצמיים.
ניתן להוכיח כי ל- AB ול- BA יש אותם ע"ע גם בלי לדעת שיש להם אותו פולינום אופייני:
נתון λ ע"ע של AB, כלומר קיים $v \neq 0$ כך ש- $ABv = \lambda v$, צריך להוכיח שקיים $w \neq 0$ כך ש- $BAw = \lambda w$. מהנתון $ABv = \lambda v$. נכפול את שני האגפים ב- B משמאל ונקבל:

$$ABv = \lambda v$$
$$BABv = B\lambda v = \lambda Bv$$
$$BA(Bv) = \lambda\, Bv = \lambda(Bv)$$

נסמן $Bv = w$ ונקבל: $BAw = \lambda w$.

אם $Bv = w \neq 0$ סיימנו, כלומר אז $w = Bv$ הוא וקטור עצמי של BA השייך לע"ע λ.
אם $w = 0$ (לכן w אינו ו"ע של BA) אז מהנתון נובע: $ABv = A(Bv) = A\cdot 0 = 0$ מצד שני $ABv = \lambda v$ כלומר $\lambda v = 0$. אבל $v \neq 0$ לכן בהכרח $\lambda = 0$. קיבלנו כי אם $w = Bv = 0$ אז $\lambda = 0$ הוא ע"ע של AB כלומר AB לא הפיכה. מאחר והמטריצות A ו- B הן ריבועיות מאותו הסדר הרי ש- $\det(AB) = \det(BA) = 0$ כלומר גם BA לא הפיכה ולכן $\lambda = 0$ הוא גם ע"ע של BA.

סעיף ג' לא נכון. ניקח את הדוגמא מסעיף א', אז AB היא מטריצת ה- 0 לכן כל וקטור ב- R^2 הוא וקטור עצמי של AB השייך לע"ע 0 אבל לא כל וקטור ב- R^2 הוא וקטור עצמי של BA, למשל:

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

לכן $(1,1)$ וקטור עצמי של AB אבל הוא לא וקטור עצמי של BA.

<u>סעיף ד'</u> לא נכון. למשל:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ \ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

לשתי המטריצות אותו פולינום אופייני: $f(\lambda)=\lambda^2$ אבל הן לא דומות כי A לכסינה (היא כבר אלכסונית) אבל B לא לכסינה כי הריבוי האלגברי של 0 הוא 2 אבל הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1.

<u>סעיף ה'</u> לא נכון שכן למטריצות דומות אין את אותם וקטורים עצמיים. למשל:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ \ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

המטריצה A והמטריצה B דומות כי B לכסינה (יש לה שני ע"ע שונים) ודומה לאלכסונית A. קל לראות כי הווקטור $(0\ ,\ 1)$ הוא וקטור עצמי של A השייך לע"ע 0 אבל הוא לא וקטור עצמי של B:

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\forall\lambda$$

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 7:</u>

יהי $p(x)=(x-2)^2(x-3)^2(x-4)$ הפולינום האופייני של מטריצה ממשית A. אחת הטענות הבאות <u>איננה</u> נכונה. סמן אותה.

א) $tr\left(A^2-4I\right)=22$.

ב) $\left|A^2-2A\right|=1738$.

ג) A לכסינה אם ורק אם $rank(A-2I)+rank(A-3I)=6$.

ד) אם $rank(A-4I)=rank(A-2I)$ אז A איננה לכסינה.

ה) A הפיכה.

<u>פתרון שאלה מספר 7:</u>

מתוך הנתונים נובע כי סדר המטריצה A הוא 5×5 כמעלת הפולינום האופייני של A. בנוסף, הע"ע של A הם:

$$\lambda_{1,2}=2\quad,\quad\lambda_{3,4}=3\quad,\quad\lambda_5=4$$

לבדיקת נכונות הסעיפים נעזר במשפט הבא:

אם A מטריצה מסדר $n\times n$ ו- $g(x)$ פולינום כלשהו אז לכל ע"ע λ של A עם וקטור עצמי v מתקיים ש- $g(\lambda)$ הוא ע"ע של $g(A)$ עם אותו וקטור עצמי v.

לכן, כדי למצוא ע"ע של $g(A)$ עלינו להציב בפולינום $g(x)$ את הע"ע של A.

<u>סעיף א'</u>: נבדוק אם הוא נכון:

$$g(x)=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad g(A)=A^2-4I$$
$$\mu_{1,2}=g(2)=2^2-4=0$$
$$\mu_{3,4}=g(3)=3^2-4=5$$
$$\mu_5=g(4)=4^2-4=12$$

מאחר והעקבה של מטריצה שווה לסכום הע"ע שלה הרי ש-
$trace(A^2-4I)=0+0+5+5+12=22$ לכן סעיף א' נכון.

<u>סעיף ב'</u>: נבדוק אם הוא נכון:

$$g(x)=x^2-2x \quad \Rightarrow \quad g(A)=A^2-2A$$
$$\mu_{1,2}=g(2)=2^2-2\cdot 2=0$$
$$\mu_{3,4}=g(3)=3^2-2\cdot 3=3$$
$$\mu_5=g(4)=4^2-2\cdot 4=8$$

מאחר והדטרמיננטה של מטריצה שווה למכפלת הע"ע שלה הרי ש-
$\det(A^2-2A)=0\cdot 0\cdot 3\cdot 3\cdot 8=0$ לכן סעיף ב' לא נכון.

<u>סעיף ג'</u> נכון כי A לכסינה אם"ם הריבוי האלגברי של כל ע"ע של A שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.

מאחר ו- 4 הוא ע"ע מריבוי אלגברי 1 הרי שגם הריבוי הגיאומטרי שלו הוא 1 וע"ע זה אינו משפיע על הליכסון של A. הע"ע 2 ו- 3 הם מריבוי אלגברי 2 לכן כדי ש- A תהייה לכסינה נדרוש שגם הריבוי הגיאומטרי שלהם יהיה 2, כלומר A לכסינה אם"ם:

$$5-rank(A-2I)=2 \quad \Leftrightarrow \quad rank(A-2I)=3$$

וגם

$$5-rank(A-3I)=2 \quad \Leftrightarrow \quad rank(A-3I)=3$$

כלומר A לכסינה אם"ם

$$rank(A-2I)+rank(A-3I)=3+3=6$$

<u>סעיף ד'</u> נכון כי 4 הוא ע"ע מריבוי גיאומטרי 1 של A ולכן ידוע כי: $5-rank(A-4I)=1$ כלומר $rank(A-4I)=4$ אם $rank(A-2I)=rank(A-4I)=4$ אז גם 2 הוא ע"ע מריבוי גיאומטרי 1. אבל הריבוי האלגברי שלו הוא 2 ולכן A איננה לכסינה.

<u>סעיף ה'</u> נכון כי 0 הוא לא ע"ע של A לכן A הפיכה.

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 8:

נתונה הטרנספורמציה $T:\ R^3 \to R^3$ כך ש- $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x+2y+z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}$. **אזי**

א) T הפיכה.
ב) $T^2 = 5T + 6I$.
ג) $T^3 = 6T^2 + 5T$.
ד) $T^3 = 6T + 5I$.
ה) $T^4 = 5\,T^3 + 6T^2$.

פתרון שאלה מספר 8:

לפי הסעיפים, יש למצוא פולינום אופייני של T ולהשתמש במשפט קיילי המילטון.
נחשב תחילה את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס הסטנדרטי E של R^3, ונסמן אותה ב- A:

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

במקום לחשב $|A-\lambda I|$ נמצא את הפולינום האופייני של A מתוך הע"ע שלה.

1. מאחר וסכום כל שורה של A הוא 6 הרי ש- 6 הוא ע"ע של A.
2. אם נוסיף 1 לאלכסון של A נקבל שהשורה הראשונה של A שווה לשורה השנייה של A כלומר המטריצה $A + I$ לא הפיכה ולכן (-1) הוא ע"ע של A.
3. חסר ע"ע שלישי ואחרון. נמצא אותו באמצעות העקבה: $\text{trace}(A) = 5 = 6 + (-1) + \lambda$ לכן הע"ע החסר הוא 0.

קיבלנו כי הע"ע של A הם 6 ,1- ,0 ולכן הפולינום האופייני של A הוא: $p(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-6)$.

מאחר ו- 0 הוא ע"ע של T הרי ש- T לא הפיכה ו<u>סעיף א'</u> לא נכון.

לבחירת הסעיף הנכון מבין ב' – ה' נעזר במשפט קיילי המילטון. לפי משפט קיילי המילטון T מאפסת את הפולינום האופייני שלה לכן:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-6) = \lambda\left(\lambda^2 - 5\lambda - 6\right) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda$$

$$p(T) = T^3 - 5T^2 - 6T = 0 \quad \Rightarrow \quad T^3 = 5T^2 + 6T$$

מאחר ותשובה זו לא נמצאת בין התשובות, נמצא את T^4 ע"י הכפלת השוויון האחרון ב- T :

$$T^3 = 5T^2 + 6T \qquad /\cdot T$$

$$T^4 = 5T^3 + 6T^2$$

סימון נכון: ה'.

שאלה מס' 9:

הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 2 & b & a & b \\ 2 & a & a & b \end{vmatrix}$ שווה ל-

א) $(b-a)^2$ ב) a^2-ab ג) $-(b-a)^2$ ד) $ab-a^2$ ה) 0

פתרון שאלה מספר 9:

נחשב את הדטרמיננטה הנתונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 2 & b & a & b \\ 2 & a & a & b \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-2R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & b-2 & -a-2 & -b-2 \\ 0 & a-2 & -a-2 & -b-2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ b-2 & -a-2 & -b-2 \\ a-2 & -a-2 & -b-2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2\to C_2-C_1 \\ C_3\to C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ b-2 & -a-b & -2b \\ a-2 & -2a & -a-b \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\begin{vmatrix} -a-b & -2b \\ -2a & -a-b \end{vmatrix} = (-1)\left[(-a-b)^2-(-2b)(-2a)\right] = (-1)\left[a^2+2ab+b^2-4ab\right] =$$

$$(-1)\left[a^2-2ab+b^2\right] = -(a-b)^2 = -[-(-a+b)]^2 = -(-1)^2(b-a)^2 = -(b-a)^2$$

סימון נכון: ג'.

שאלה מס' 10:

A ו- B הן שתי מטריצות הפיכות 4×4, המקיימות: $A^3\cdot\left(AB^2\right)^{-1}\cdot\left(AB\right)^t=3A\cdot B^{-1}$.

אז הדטרמיננטה של $\left(A^{-1}\right)^2$ שווה ל-

א) 81 ב) 27 ג) 9 ד) $\frac{1}{9}$ ה) $\frac{1}{81}$

פתרון שאלה מספר 10:

נבצע דטרמיננטה לשני האגפים של השוויון הנתון, ונעזר בחוקי דטרמיננטים:

$$A^3\cdot\left(AB^2\right)^{-1}\cdot\left(AB\right)^t=3A\cdot B^{-1}$$

$$\left|A^3\cdot\left(AB^2\right)^{-1}\cdot\left(AB\right)^t\right|=\left|3A\cdot B^{-1}\right|$$

$$\left|A^3\right|\cdot\left|\left(AB^2\right)^{-1}\right|\cdot\left|\left(AB\right)^t\right|=3^4\left|A\right|\cdot\left|B^{-1}\right|$$

$$\left|A\right|^3\cdot\left|AB^2\right|^{-1}\cdot\left|AB\right|=3^4\left|A\right|\cdot\left|B\right|^{-1}$$

$$\left|A\right|^3\cdot\frac{1}{\left|AB^2\right|}\cdot\left|A\right|\cdot\left|B\right|=3^4\left|A\right|\cdot\frac{1}{\left|B\right|}$$

$$\left|A\right|^3\cdot\frac{1}{\left|A\right|\cdot\left|B\right|^2}\cdot\left|A\right|\cdot\left|B\right|=3^4\left|A\right|\cdot\frac{1}{\left|B\right|}$$

$$\left|A\right|^3\cdot\frac{1}{\left|B\right|}=3^4\left|A\right|\cdot\frac{1}{\left|B\right|}$$

$$\left|A\right|^2=3^4$$

$$\left|\left(A^{-1}\right)^2\right|=\left|\left(A^2\right)^{-1}\right|=\left(\left|A\right|^2\right)^{-1}=\left(3^4\right)^{-1}=\frac{1}{81}$$

סימון נכון: ה'.

שאלה מס' 11:

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$, כאשר a, b, c פרמטרים ממשיים. אזי

א) A לכסינה לכל a, b, c .
ב) אם $a = 1$ אז A איננה לכסינה לכל b, c .
ג) אם $b = 1$ אז A איננה לכסינה לכל a, c .
ד) אם $a \neq b$ אז A איננה לכסינה.
ה) אם $c \neq 1$ אז A לכסינה לכל a, b.

פתרון שאלה מספר 11:

נבדוק לאילו ערכים של הפרמטרים המטריצה לכסינה ולאילו לא:
מאחר ו- A היא משולשת עליונה הרי שהע"ע שלה הם איברי האלכסון כלומר: 1 ו- c.
נבחין בשני מיקרים:
1. $c = 1$: במקרה זה 1 הוא ע"ע של A מריבוי אלגברי 3 לכן A לכסינה אם"ם הריבוי הגיאומטרי של 1 הוא 3 כלומר אם"ם: $3 - \text{rank}(A - I) = 3$ כלומר אם"ם $\text{rank}(A - I) = 0$ כלומר אם"ם $A = I$ וזה לא קורה לכל a , b.
2. $c \neq 1$: במקרה זה, c הוא ע"ע מריבוי אלגברי 1, ו- 1 הוא ע"ע מריבוי אלגברי 2. מאחר והריבוי האלגברי של c הוא 1 הרי שגם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל- 1 והוא אינו משפיע על הליכסון של A. לכן, A לכסינה אם"ם הריבוי הגיאומטרי של 1 שווה ל- 2 כלומר אם"ם:
$3 - \text{rank}(A - I) = 2$, כלומר אם"ם $\text{rank}(A - I) = 1$, כלומר אם"ם:

$$rank(A-I) = rank\begin{pmatrix}0 & -a & -1\\ 0 & 0 & -b\\ 0 & 0 & 1-c\end{pmatrix} = 1$$

וזה קורה אם"ם $a = 0$ ו- b כלשהו.
סיכום:
A לכסינה אם"ם $c \neq 1$, $a = 0$ ו- b כלשהו.
A איננה לכסינה אם $c = 1$ לכל a , b או $c \neq 1$ וגם $a \neq 0$.
<u>סעיף א'</u> לא נכון למשל אם $c = 1$.
<u>סעיף ב'</u> נכון כי בכל המקרים בהם A לכסינה בהכרח $a = 0$ לכן אם $a = 1$ אז A לא לכסינה לכל b , c.
<u>סעיף ג'</u> לא נכון כי אם $b = 1$ הרי ש- A לכסינה עבור $c = 1$ ו- $a = 0$.
<u>סעיף ד'</u> לא נכון שכן אם $a = 0$, $c \neq 1$ ו- $b \neq 0$ אז $a \neq b$ ו- A לכסינה.
<u>סעיף ה'</u> לא נכון כי אם $c \neq 1$ אז A לכסינה אם"ם $a = 0$.

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 12:

יהי V מרחב וקטורי ו- $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. נתון שהוקטורים v_1, v_2 הם בלתי תלויים ליניארית והוקטורים v_3, v_4 הם בלתי תלויים ליניארית.
אבל הקבוצה של ארבעתם $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ היא תלויה ליניארית. אזי

א) בהכרח $v_3 \in span\{ v_1, v_2\}$ או $v_4 \in span\{ v_1, v_2\}$.
ב) בהכרח $\dim span\{ v_1, v_2, v_3\} = \dim span\{ v_1, v_2, v_4\}$.
ג) בהכרח $\dim span\{ v_1, v_2, v_3\} \neq \dim span\{ v_1, v_2, v_4\}$.
ד) בהכרח $span\{ v_1, v_2\} \cap span\{ v_3, v_4\} \neq \{0\}$.
ה) כל הטענות האחרות אינן נכונות.

פתרון שאלה מספר 12:
סעיף א' לא נכון. דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

אז הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ תלויה ליניארית כי $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$ אבל $v_3 \notin sp\{v_1, v_2\}$ וגם $v_4 \notin sp\{v_1, v_2\}$

סעיף ב' לא נכון. דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

אז הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ תלויה ליניארית כי $v_4 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$ אבל
$\dim sp\{v_1, v_2, v_3\} = 3 \neq \dim sp\{v_1, v_2, v_4\} = 2$

סעיף ג' לא נכון. דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

אז הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ תלויה ליניארית כי $v_2 = v_4$, $v_1 = v_3$ אבל
$\dim sp\{v_1, v_2, v_3\} = \dim sp\{v_1, v_2, v_4\} = 2$

סעיף ד' נכון. נוכיח אותו. לפי הנתון, $\{v_1, v_2\}$ הוא בסיס של $U = sp\{v_1, v_2\}$ ו- $\{v_3, v_4\}$ הוא בסיס של $W = sp\{v_3, v_4\}$ כלומר $\dim U = \dim W = 2$. לפי משפט, איחוד הבסיסים של U ושל W הוא קבוצה פורשת למרחב $U + W$ לכן הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ פורשת את המרחב $U + W$. מאחר ונתון שהקבוצה תלויה ליניארית, הרי ש- $\dim(U + W) \leq 3$. נחשב את מימד $U \cap W$:

$$3 \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \geq 2 + 2 - \dim(U \cap W)$$

$$3 \geq 4 - \dim(U \cap W) \quad \Rightarrow \quad \dim(U \cap W) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad U \cap W \neq \{0\}$$

סימון נכון: ד'.

שאלה מס' 13:

יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה 1 מעל השדה R, ויהיו $u = x$ ו- $v = 2x + 3$.

נגדיר מכפלה פנימית על V כלהלן: $b > 0$ $\langle u,v\rangle = \int_0^b u(x)\cdot v(x)\,\mathbf{d}x$.

נתון ש- u ו- v אורתוגונליים. אז b שווה ל-

א) $-\frac{3}{2}$ ב) $-\frac{9}{4}$ ג) $\frac{2}{3}$ ד) $\frac{4}{9}$ ה) $-\frac{4}{3}$

פתרון שאלה מספר 13:

נזכור כי התנאי $b > 0$ בוטל ...

נתון כי u ו- v אורתוגונאליים, כלומר $\langle u,v\rangle = 0$, נחשב את b:

$$\langle u,v\rangle = \int_0^b u(x)\cdot v(x)\,\mathbf{d}x$$

$$0 = \langle u,v\rangle = \langle 2x+3,x\rangle = \langle 2x,x\rangle + \langle 3,x\rangle = 2\langle x,x\rangle + 3\langle 1,x\rangle$$

$$= 2\int_0^b x\cdot x\,\mathbf{d}x + 3\int_0^b 1\cdot x\,\mathbf{d}x = 2\int_0^b x^2\,\mathbf{d}x + 3\int_0^b x\,\mathbf{d}x = \left(2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^b =$$

$$\left[2\frac{b^3}{3} + 3\frac{b^2}{2}\right] - \left[2\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right] = 2\frac{b^3}{3} + 3\frac{b^2}{2} = 0$$

$$4b^3 + 9b^2 = 0$$

ברור כי $b \neq 0$ אחרת לכל u , v מתקיים $\langle u,v\rangle = 0$ בסתירה לתנאי 3 של מכפלה פנימית, לכן נחלק את השוויון האחרון ב- b^2 ונקבל: $4b + 9 = 0$ כלומר $b = -\frac{9}{4}$.

סימון נכון: ב'.

שאלה מס' 14:

יהי $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ תת- המרחב של מרחב המטריצות הממשיות V מסדר 2×2. יהי $W^{\perp}$ המרחב המשלים האורתוגונלי של W ביחס למכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = tr\,(B^t\cdot A)$.
אזי בסיס ל- $W^{\perp}$ הוא:

א) $\left\{\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}\right\}$

ב) $\left\{\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -7\end{pmatrix}\right\}$

ג) $\left\{\begin{pmatrix}7 & -1\\ \pi & -5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ \sqrt{2} & -4\end{pmatrix}\right\}$

ד) $\left\{\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

ה) $\left\{\begin{pmatrix}7 & -1\\ \pi & -5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ \sqrt{2} & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\\ \sqrt{e} & 2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון שאלה מספר 14:

לפי משפט, אם W הוא תת מרחב של מרחב מכפלה פנימית V הרי ש- $V = W\oplus W^{\perp}$. מאחר ו- $\dim W = 1$ הרי ש- $\dim W^{\perp} = 3$. לכן, האפשרויות הן ב', ד' או ה'.
בנוסף מהגדרת $W^{\perp}$, כל מטריצה ב- $W^{\perp}$ ניצבת לכל מטריצה ב- W. נמצא מהו התנאי שצריכה לקיים מטריצה A כלשהי כדי להימצא ב- $W^{\perp}$:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in W^{\perp} \quad\Leftrightarrow\quad \left\langle\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right\rangle = trace\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = trace\begin{pmatrix}a & 2a+c\\ b & 2b+d\end{pmatrix} = 0$$

$$a+2b+d=0$$

קל לראות שהמטריצה הימנית בקבוצה ה' לא מקיימת את התנאי כי: $1+2\cdot 3+2 \neq 0$, לכן סעיף ה' לא נכון.
כל המטריצות בקבוצות ב' ו- ד' מקיימות את התנאי הנ"ל לכן שייכות ל- $W^{\perp}$. לכן, כדי שיהיו בסיס ל- $W^{\perp}$ עליהן להיות בלתי תלויות ליניארית. נבדוק תלות בין המטריצות בכל קבוצה.
המטריצות בסעיף ד':

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -4\\ 7 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2 & -6\\ 0 & 6 & -4 & -12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

הקבוצה תלויה לכן בהכרח התשובה הנכונה היא ב' (ניתן לבדוק ולראות שאכן הקבוצה בת"ל).
סימון נכון: ב'.

אלגברה 1 מ' (104016)

בחינת מועד א' חורף תשס"ו

דף תשובות נכונות

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה 1			×		
שאלה 2		×			
שאלה 3				×	
שאלה 4		×			
שאלה 5			×		
שאלה 6		×			
שאלה 7		×			
שאלה 8					×
שאלה 9			×		
שאלה 10					×
שאלה 11		×			
שאלה 12				×	
שאלה 13		×			
שאלה 14		×			